

PENGHITUNGAN KREDIBILITAS DENGAN PUSTAKA ACTUAR DALAM R

I. MAULIDI¹, W. ERLIANA², A. D. GARNADI², S. NURDIATI²,
I G. P. PURNABA²

Abstrak

Teori Kredibilitas (*Credibility Theory*) merupakan perangkat penting dalam pekerjaan aktuaria. Dengan menggunakan Kredibilitas dapat diduga besarnya pembayaran premi atau banyaknya klaim yang akan terjadi di masa mendatang secara kredibel. Dalam tulisan ini akan diperkenalkan konsep dalam teori kredibilitas dan aplikasinya dengan menggunakan paket Actuar yang ditulis menggunakan software R.

PENDAHULUAN

Kredibilitas adalah sebuah ukuran penilaian seorang aktuaris terhadap dugaan premi di masa mendatang. Data di masa lampau tidak sepenuhnya dapat digunakan untuk menduga di masa mendatang, sehingga revisi dari penduga pun sering dilakukan. Selain itu risiko untuk setiap kelompok individu sangat dimungkinkan berbeda beda. Oleh karena itu kita perlu mengembangkan suatu analisis dari data di masa lampau untuk menduga data di masa mendatang. Sering kali data di masa lampau tidak stabil apabila digunakan untuk memprediksi premi di masa mendatang, sehingga revisi pendugaan sering kali dilakukan. Oleh karena itu diperlukan suatu tool untuk menggunakan data di masa lampau sehingga dapat memprediksi besarnya tingkat premi dan banyaknya klaim di masa mendatang.

Misalkan X_1, X_2, \dots, X_n merupakan besarnya kehilangan di n tahun yang lalu atau n pemegang polis yang lalu. Secara umum ini merupakan n unit *exposure* yang diamati.

Asumsi

$$\begin{aligned}E[X_j] &= \xi, \\ \text{Var}(X_j) &= \sigma^2, \\ \text{Var}(\bar{X}) &= \frac{\sigma^2}{n},\end{aligned}$$

untuk $j = 1, \dots, n$ dan

¹Program Studi Matematika Universitas Syiah Kuala, Banda Aceh. Email: ikhsanmath47@gmail.com.

²Departemen Matematika, Fakultas Ilmu Matematika dan Pengetahuan Alam, Jalan Meranti Kampus IPB, Dramaga Bogor, 16680.

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j$$

Ada pun untuk menyatakan kredibilitas untuk X kita harus mendefinisikan error relatif terlebih dahulu. Untuk suatu nilai peluang $p, p \in \mathbb{R}, 0 \leq p \leq 1$ dan untuk tingkat error ε , jika dipenuhi

$$P\left(\left|\frac{\bar{X} - \xi}{\xi}\right| \leq \varepsilon\right) \geq p,$$

maka kita katakan X adalah *credible* untuk ξ .

BEBERAPA MODEL KREDIBILITAS

Model Buhlmann

Model ini merupakan model kredibilitas yang paling sederhana. Pada masing-masing pemegang polis (bergantung pada Θ), besarnya klaim dari masa lalu X_1, \dots, X_n memiliki rata-rata dan ragam yang sama dan *i.i.d* bergantung pada Θ .

Didefinisikan

$$\mu(\theta) = E(X_j | \Theta = \theta),$$

dan

$$v(\theta) = \text{Var}(X_j | \Theta = \theta).$$

Dalam hal ini $\mu(\theta)$ kita disebut sebagai *hypothetical mean* dan $v(\theta)$ disebut *process variance*.

Selanjutnya kita dapat menentukan rata-rata, ragam dan koragam X_j sebagai berikut:

$$E(X_j) = E[E(X_j | \Theta)] = E[\mu(\Theta)] = \mu,$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_j) &= E[\text{var}(X_j | \Theta)] + \text{var}[E(X_j | \Theta)] = \mu \\ &= E(v(\Theta)) + \text{var}(\mu(\Theta)) \\ &= v + a, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_i, X_j) &= E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j), i \neq j \\ &= E[E(X_i X_j | \Theta)] - \mu^2 \\ &= E(E(X_i | \Theta) \cdot E(X_j | \Theta)) - [E(\mu(\Theta))]^2 \\ &= E((\mu(\Theta))^2) - [E(\mu(\Theta))]^2 \\ &= \text{Var}(\mu(\Theta)) = a. \end{aligned}$$

Model pedugaan premi kredibilitas Buhlmann dihampiri dengan suatu fungsi linear berikut:

$$\alpha_o + \sum_{j=1}^n \alpha_j X_j = Z \bar{X} + (1 - Z) \mu,$$

Dengan $Z = \frac{n}{k+n}$, $k = \frac{v}{a} = \frac{E[\text{var}(X_j|\theta)]}{\text{var}[E(X_j)|\theta]}$. Penurunan formula ini dapat dilihat pada Klugman (2012).

Model Buhlmann Straub

Model kredibilitas Buhlmann-Straub adalah pengembangan dari model kredibilitas Buhlmann dengan beberapa asumsi tambahan. Diberikan $\theta, X_1, \dots, X_{n+1}$ saling bebas untuk $j = 1, 2, \dots, n+1$, misalkan pula m_j menyatakan banyaknya individu pada tahun ke- j maka berlaku:

$$E[X_j|\theta] = \mu(\theta),$$

$$\text{Var}(X_j|\theta) = \frac{v(\theta)}{m_j}.$$

Selanjutnya kita notasikan sebagai berikut:

$$\mu = E[\mu(\theta)], a = \text{Var}(\mu(\theta))$$

$$v = E[v(\theta)], k = \frac{v}{a}.$$

Kuantitas-kuantitas di atas dapat digunakan untuk menentukan premi kredibilitas.

Premi kredibilitas untuk model Buhlmann-Straub ini adalah

$$(1 - Z)\mu + Z\bar{X},$$

dengan $\bar{X} = \sum_{j=1}^n \frac{m_j X_j}{m}$, $Z = \frac{m}{m+k}$, dan $\sum_{j=1}^n m_j = m$.

BEBERAPA CONTOH DAN APLIKASI

Contoh 1

Misalkan banyaknya klaim tahunan untuk seorang individu yang diasuransikan memiliki sebaran Poisson. Nilai harapan frekuensi klaim tahunan (parameter Poisson Δ) dari anggota populasi yang diasuransikan menyebar seragam (0,1). Rataan frekuensi klaim tahunan individu adalah konstan sepanjang waktu. Tentukan faktor kredibilitas Buhlman Z jika ada n amatan.

Jawab:

Hypothetical mean dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\mu(\Delta) = E(X|\Delta) = \Delta,$$

hal ini karena $X|\Delta$ menyebar Poisson(Δ). Proses *variance* dapat ditentukan sebagai berikut:

$$V(\Delta) = \text{var}(X|\Delta) = \Delta$$

sehingga diperoleh kuantitas:

$$\mu = E(X) = E(E(X|\Delta)) = E(\mu(\Delta)) = E(\Delta) = 0.5$$

$$v = E(V(\Delta)) = E(\Delta) = 0.5$$

$$\alpha = \text{var}(\mu(\Delta)) = \text{var}(\Delta) = \frac{1}{12}$$

sehingga diperoleh faktor kredibilitas Buhlmann

$$Z = \frac{n}{n + \frac{1/2}{1/12}} = \frac{n}{n + 6}.$$

Contoh 2

Misalkan N_j menyatakan banyaknya klaim di tahun j , di mana terdapat m_j anggota di tahun j tersebut. Diberikan $\theta = \theta, N_j | (\theta = \theta) \sim \text{Poisson}(m_j \theta)$ dan $\theta \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$. Selanjutnya dari informasi tersebut kita dapat menentukan Buhlmann-Straub *credibility premium* dari rata-rata banyaknya klaim pada tahun $n + 1$ untuk setiap anggota.

Jawab:

Misalkan $X_j = \frac{N_j}{m_j}$, maka

$$\mu(\theta) = E[X_j | \theta] = \frac{1}{m_j} E[N_j | \theta] = \frac{1}{m_j} m_j \theta = \theta,$$

$$v(\theta) = \text{Var}(X_j | \theta) = \frac{1}{m_j^2} \text{Var}(N_j | \theta) = \frac{1}{m_j^2} m_j \theta = \frac{\theta}{m_j},$$

$$\mu = E[\mu(\theta)] = E[\theta] = \alpha\beta,$$

$$v = m_j E[v(\theta)] = m_j \frac{1}{m_j} E[\theta] = \alpha\beta,$$

$$a = \text{Var}(\mu(\theta)) = \text{Var}(\theta) = \alpha\beta^2,$$

$$k = \frac{v}{a} = \frac{1}{\beta},$$

sehingga diperoleh *credibility factor* $Z = \frac{m}{m+k} = \frac{m\beta}{m\beta+1}$. Dengan demikian, Buhlmann-Straub *Credibility* untuk model ini adalah

$$\frac{m\beta}{m\beta + 1} \bar{X} + \frac{1}{m\beta + 1} \alpha\beta.$$

PENGGUNAAN PACKAGES “ACTUAR” UNTUK KREDIBILITAS

Simulasi Data Hachemeister

Berikut ini kami sajikan sebuah contoh simulasi menentukan besarnya premi dengan menggunakan model kredibilitas. Simulasi dilakukan dengan menggunakan software R dan packages "actuar" yang diperoleh dari CRAN. Data yang digunakan dalam simulasi adalah data dari Hachemesiter (1975) yang memuat besarnya klaim dan banyaknya klaim dari pemegang polis asuransi. Data ini terdapat dalam packages berupa matriks dengan banyaknya baris 5 dan banyaknya kolom adalah 25. Kolom 1 merepresentasikan kelompok dari pemegang polis, kolom 2-13 merepresentasikan rata-rata besarnya klaim setiap periode dan kolom 14-25 merepresentasikan banyaknya klaim setiap periode.

```
> data(hachemeister)
> hachemeister
      state ratio.1 ratio.2 ratio.3 ratio.4 ratio.5 ratio.6 ratio.7 ratio.8
[1,]      1  1738   1642   1794   2051   2079   2234   2032   2035
[2,]      2  1364   1408   1597   1444   1342   1675   1470   1448
[3,]      3  1759   1685   1479   1763   1674   2103   1502   1622
[4,]      4  1223   1146   1010   1257   1426   1532   1953   1123
[5,]      5  1456   1499   1609   1741   1482   1572   1606   1735
      ratio.9 ratio.10 ratio.11 ratio.12 weight.1 weight.2 weight.3 weight.4
[1,]   2115    2262    2267    2517    7861    9251    8706    8575
[2,]   1464    1831    1612    1471    1622    1742    1523    1515
[3,]   1828    2155    2233    2059    1147    1357    1329    1204
[4,]   1343    1243    1762    1306    407    396    348    341
[5,]   1607    1573    1613    1690    2902    3172    3046    3068
      weight.5 weight.6 weight.7 weight.8 weight.9 weight.10 weight.11 weight.12
[1,]   7917    8263    9456    8003    7365    7832    7849    9077
[2,]   1622    1602    1964    1515    1527    1748    1654    1861
[3,]    998    1077    1277    1218    896    1003    1108    1121
[4,]    315    328    352    331    287    384    321    342
[5,]   2693    2910    3275    2697    2663    3017    3242    3425
> |
```

Fungsi yang digunakan untuk model kredibilitas adalah fungsi *cm*. Untuk model Buhlmann di mana tidak mempertimbangkan adanya pembobotan, premi dapat ditentukan sebagai berikut:

```
> cm(~state, hachemeister, ratios=ratio.1:ratio.12)
Call:
cm(formula = ~state, data = hachemeister, ratios = ratio.1:ratio.12)

Structure Parameters Estimators

Collective premium: 1671.017

Between state variance: 72310.02
Within state variance: 46040.47
```

Berikut hasil simulasi untuk model Buhlmann-Straub (memperhitungkan adanya pembobotan) yang menggunakan model Bichsel Straub:

```
> cm(~state, hachemeister, ratios=ratio.1:ratio.12, weights=weight.1:weight.12)
Call:
cm(formula = ~state, data = hachemeister, ratios = ratio.1:ratio.12,
  weights = weight.1:weight.12)

Structure Parameters Estimators

Collective premium: 1683.713

Between state variance: 89638.73
Within state variance: 139120026
```

Dari simulasi di atas diperoleh nilai premi kredibilitas untuk model Buhlmann adalah 1671.017, sedangkan untuk model Buhlmann-Straub diperoleh premi kredibilitas sebesar 1683.713.

SimulasiContoh 1

Untuk menguji hasil dari contoh 1, kami melakukan simulasi dengan membangkitkan data besarnya klaim. Data tersebut kami sajikan sebagai berikut:

```
'> simulasi
periode  bulan.1  bulan.2  bulan.3  bulan.4  bulan.5  bulan.6
1        1 0.6376503 0.6033292 0.06649485 0.06783176 0.0809631 0.07325076
2        2 0.9284553 0.8202483 0.50642640 0.80434591 0.7779573 0.79099336
```

Dari data tersebut diketahui $\bar{X} = 0.513$. Dengan menggunakan formula Z dalam contoh 1, diperoleh

$$Z = \frac{n}{n+6} = \frac{12}{12+6} = 0.67,$$

diperoleh hasil dugaan premi Buhlmann secara teori sebagai berikut:

$$(1-Z)\mu + Z\bar{X} = 0.5088.$$

Dengan menggunakan perintah *cm* dalam package *actuar* diperoleh hasil berikut:

```
> cm(~periode,simulasi,ratios=bulan.1:bulan.6)
Call:
cm(formula.= ~periode, data = simulasi, ratios = bulan.1:bulan.6)

Structure Parameters Estimators

Collective premium: 0.5131622

Between periode variance: 0.1250378
Within periode variance: 0.0500418
```

Terlihat bahwa hasil dugaan premi yang diperoleh adalah 0.5132.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penelitian ini didanai oleh PUPT-IPB *under contract* no: 079/SP2H/LT/DRPM/I I/2016.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Hachemeister CA. 1975. Credibility for regression models with application to trend. In *credibility, theory and applications*, Proceeding of the berkeley Actuarial Research Conference on Credibility, pages 129-163. New York: Academic Press.
- [2] Buhlmann H, Gisler A. 2005. *A course in credibility theory and its applications*. Springer, ISBN 3-5402575-3-5.
- [3] Buhlmann H, Straub E. 1970. Glaubwürdigkeit für Schadensatz. *Bulletin of the Swiss Association of Actuaries*, 70: 111-133.
- [4] Klugman SA, et.al. 2012. *Loss Models: From Data to Decisions*. Wiley, ISBN 1118315324.

